Задача.

III

Найти вписанный.

Дана вершина параболы, диаметр, параметр и вписанный треугольник. Требуется построить другой треугольник, вписанный в данную параболу, подобный данному и имеющий с ним общую вершину.

Пусть $y^2 = 2px$ — уравнение параболы, p — её параметр, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) — вершины данного треугольника. Ищем вершины (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3') искомого. Подобие даёт равенства углов: $\angle 1 = \angle 1'$, $\angle 2 = \angle 2'$, $\angle 3 = \angle 3'$.

Угол между хордой, идущей из вершины в точку (x, y), и осью параболы равен $\operatorname{arctg}\frac{p}{y}$. Поэтому $\operatorname{arctg}\frac{p}{y_1} = \operatorname{arctg}\frac{p}{y_1'}$, откуда $y_1' = y_1$. Аналогично $y_2' = y_2$, $y_3' = y_3$.

Вершины лежат на параболе, значит $x_1' = \frac{y_1^2}{2p}$, $x_2' = \frac{y_2^2}{2p}$, $x_3' = \frac{y_3^2}{2p}$.

Задача имеет не более одного решения.

IV

Построить касательную.

Дана парабола $y^2 = 2px$ и точка (x_0, y_0) вне её. Требуется провести касательную через эту точку.

Уравнение касательной: $yy_0 = p(x + x_0)$. Подставляя $x = \frac{y^2}{2p}$, получаем $y^2 - 2y_0 y + 2px_0 = 0$. Дискриминант $D = 4y_0^2 - 8px_0$. Касательная существует при $D \geq 0$, т. е. $y_0^2 \geq 2px_0$.

Точки касания: $\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ и $\left(x_0 - \frac{y_0^2}{2p}, y_0 - p\right)$.

V

Построить все общие касательные.

Даны две параболы $y^2 = 2p_1 x$ и $y^2 = 2p_2 x$. Найти общие касательные.

Уравнение касательной к первой параболе: $y = kx + \frac{p_1}{2k}$. Подставляя во вторую, получаем $k^2 x^2 + \left(\frac{p_1}{k} - 2p_2\right)x + \frac{p_1^2}{4k^2} = 0$. Дискриминант $D = \left(\frac{p_1}{k} - 2p_2\right)^2 - p_1^2$. Приравнивая $D = 0$, получаем $k = \frac{p_1}{2p_2}$.

Общая касательная: $y = \frac{p_1}{2k}x + k$, где $k = \frac{p_1}{2p_2}$.

VI

Найти фокус.

Дана парабола $y^2 = 2px$. Найти её фокус.

Фокус — точка F, обладающая тем свойством, что расстояние от любой точки параболы до F равно расстоянию от этой точки до директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Ответ: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

VII

Найти директрису.

Дана парабола $y^2 = 2px$. Найти её директрису.

Директриса — прямая, перпендикулярная оси симметрии и расположенная симметрично фокусу относительно вершины.

Ответ: $x = -\frac{p}{2}$.

VIII

Найти эксцентриситет.

Дана парабола $y^2 = 2px$. Найти её эксцентриситет.

Эксцентриситет параболы равен единице по определению.

Ответ: $e = 1$.

IX

Найти уравнение нормали.

Дана парабола $y^2 = 2px$ и точка (x_0, y_0) на ней. Найти уравнение нормали.

Угловой коэффициент касательной: $k = \frac{p}{y_0}$. Угловой коэффициент нормали: $-\frac{y_0}{p}$.

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$.

X

Найти длину.

Дана парабола $y^2 = 2px$. Найти длину дуги от вершины до точки (x_0, y_0).

Длина дуги: $s = \frac{y_0}{2}\sqrt{p^2 + y_0^2} + \frac{p^2}{2}\ln\frac{y_0 + \sqrt{p^2 + y_0^2}}{p}$.

Ответ: $s = \frac{y_0}{2}\sqrt{p^2 + y_0^2} + \frac{p^2}{2}\ln\frac{y_0 + \sqrt{p^2 + y_0^2}}{p}$.

XI

Построить дуг.

Дана парабола $y^2 = 2px$. Построить дугу, длина которой равна данному отрезку a.

Длина дуги от вершины до точки (x, y): $s = \frac{y}{2}\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2}\ln\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}$.

Решение трансцендентное; строится численно.

Ответ: дуга строится циркулем и линейкой.